Dans le plan affine euclidien, on se donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et deux points A, B distincts. Quel est l'ensemble des points M du cercle qui minimisent la somme $MA^2 + MB^2$?

Solution :

[0] [utri0017] Dany-Jack Mercier

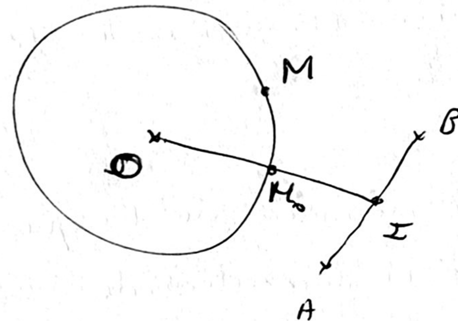
Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A, B deux pts distincts du plan.
Chercher l'ensemble des points M du cercle $\mathcal{C}$ qui minimisent la somme MA^2+MB^2.

1° solution :

Soit I milieu de [AB].

$MA^2+MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$ donc tout revient à minimiser la distance MI quand M parcourt $\mathcal{C}$.

Soit $\{M_0\} = \mathcal{C} \cap [O, I)$



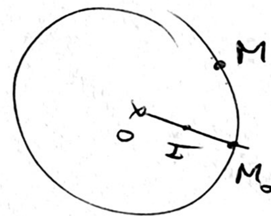
1er cas : I extérieur au cercle.

Alors $M_0 \in [OI]$ et tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{M_0\}$ vérifie :

$$M \notin [OI] \iff OI < OM + MI \Rightarrow \cancel{OM_0} + M_0I < \cancel{OM} + MI$$
$$\Rightarrow M_0I < MI$$

2e cas : I intérieur au cercle

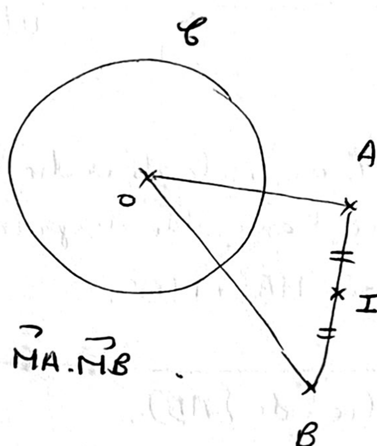
Alors $I \in [OM_0]$ et tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{M_0\}$ vérifie



$$I \notin [OM] \iff OM < OI + IM$$
$$\Rightarrow OM_0 < OI + IM$$
$$\Rightarrow \cancel{OI} + IM_0 < \cancel{OI} + IM$$

Ccl : L'ensemble $\mathcal{E}$ cherché est $\{M_0\}$.

2-solution :



$AB^2 = (\vec{AM} + \vec{MB})^2$

$= AM^2 + BM^2 + 2\,\vec{AM}.\vec{MB}$

donc $MA^2 + MB^2 = AB^2 + 2\,\vec{MA}.\vec{MB}$.

Tout revient à minimiser le produit scalaire $\vec{MA}.\vec{MB}$.

$\vec{MA}.\vec{MB} = MO^2 + \vec{MO}.(\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OA}.\vec{OB}$

$= r^2 + \frac{1}{2}\vec{MO}.\vec{OI} + \vec{OA}.\vec{OB}$ où I milieu de $[AB]$.

Il faut minimiser $\vec{MO}.\vec{OI} = \overset{=r}{MO}.OI.\cos(\vec{MO},\vec{OI})$, ie avoir $\cos(\vec{MO},\vec{OI}) = -1$.

Cela équivaut à $(\vec{MO},\vec{OI}) = \pi \ (2\pi)$, ie $(\vec{OM},\vec{OI}) = 0 \ (2\pi)$, ie

$M \in [OI)$.

Conclusion : Le minimum de l'expression ~~est~~ quand M parcourt le cercle 𝒞 est atteint en M intersection de $[OI)$ et 𝒞. □

(NB : On obtient aussi le maximum de l'expression $MA^2 + MB^2$ en prenant le pt diam opposé à M)